

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ingeniería Económica, Estadística y CC. SS.

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERIA ESTADISTICA

PRUEBA DE ENTRADA – ALGEBRA LINEAL

2020-1

Alumno: Saucedo Batallanos Marlon Nilo

Código: 20231552C

1. Dadas las rectas:

$$L_1 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{3} = z-4$$

$$L_2 = \{(1,0,-1) + (1,1,2) / t \in R\}$$

Calcule la ecuación de la recta L que es perpendicular $a\ L_1\ y\ L_2$

Solucionario:

Problema 01

$L_1: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{3} = z-4$; $L_2 = \{(1,0,-1) + (1,1,2) / t \in R\}$

Calcule la ecuación de la recta L que es perpendicular a L_1 y L_2.

Solucionario: Para encontrar la ecuación de la recta "L" que es perpendicular a L_1 como a L_2, Primero necesitamos encontrar el vector dirección de L_1 y L_2, y luego utilizar el producto cruz para encontrar un vector dirección para "L". Después, podemos utilizar un punto en común entre L_1 y L_2 para encontrar la ecuación de "L".

1. Encontrar el vector dirección de "L_1": $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{3} = z-4$, podemos obtener el vector dirección dividiendo los coeficientes de x, y, z.

$\vec{v}_{L_1} = (-2, 3, 1)$.

2. Encontrar el vector dirección de "L_2": Dada la parametrización de L_2

$r(t) = (1, 0, -1) + t(1,1,2)$, el vector dirección de L_2 es el vector que multiplica a "t": $\vec{v}_{L_2} = (1,1,2)$.

3. Buscamos un vector dirección para "L": Dado que "L" es perpendicular tanto a L_1 como L_2, el vector dirección "L" puede ser encontrado usando el producto cruz de $\vec{v}_{L_1}$ y $\vec{v}_{L_2}$: $\vec{v}_L = \vec{v}_{L_1} \times \vec{v}_{L_2}$

Calculando el producto cruz: $\vec{v}_L = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}((3\times2)-(1\times1)) - \hat{j}(-2\times2 - 1\times1) + \hat{k}(-2\times1 - 3\times1)$

$= \hat{i}(6-1) - \hat{j}(-4-1) + \hat{k}(-2-3) = \hat{i}(5) - \hat{j}(-5) - \hat{k}(-5) = (5, -5, -5)$

Entonces, el vector dirección de "L" es $(5, -5, -5)$.

2. Sea la matriz

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Calcule A^n

Problema (02): Sea la matriz: $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$; Calcule A^n:

Solución:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1\times1+1\times0+0\times0)&(1\times1+1\times1+0\times0)&(0\times1+1\times1+0\times1)\\(1\times0+0\times1+1\times0)&(0\times1+1\times1+1\times0)&(0\times0+1\times1+1\times1)\\(0\times1+0\times0+1\times0)&(0\times1+1\times0+0\times1)&(0\times0+1\times0+1\times1)\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix};\quad A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&6\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^5=\begin{bmatrix}1&4&6\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&10\\0&1&5\\0&0&1\end{bmatrix};\quad A^6=\begin{bmatrix}1&5&10\\0&1&5\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6&15\\0&1&6\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^7=\begin{bmatrix}1&6&15\\0&1&6\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&7&21\\0&1&7\\0&0&1\end{bmatrix}\ldots$$

Por lo tanto para saber el número de la posición $a_{1\times3}$; lo calculamos de la siguiente manera:

$$a_{1\times3}=\{0,1,3,6,10,15\}=\{A^2_{(a_{1\times3})};\ A^3_{(a_{1\times3})};\ A^4_{(a_{1\times3})};\ A^5_{(a_{1\times3})}\ldots\}$$

$$\rightarrow (0)C_0^{n-1}+(1)C_1^{n-1}+1.C_2^{n-1}=a_n \longrightarrow \boxed{(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2!}=a_n}$$

Entonces para hallar el término de la matriz: A^n

$$A^n=\begin{bmatrix}1&n&(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&n&(n)(n-1)/2\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$$

3. i) Determine el valor de n si se verifica:

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ -1 & 1-n \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. i). Determine el valor de "n" si se verifica:

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ -1 & 1-n \end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix} n & 0 \\ -1 & 1-n \end{pmatrix}_{2\times 2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$\begin{bmatrix} (n.n + 0(-1)) & (n\times 0 + 0(1-n)) \\ ((-1)(n) + (-1)(1-n)) & (0\times(-1) + (1-n)(1-n)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n^2 & 0 \\ (-1+1) & (0+(1-n)^2) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

- $n^2 = 4 \longrightarrow n^2 - 4 = 0 \rightarrow n_{1;2} = \{+2; -2\}$

5. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a. Si A es inversible entonces : $\left((A)^{-1}\right)^{-1} = A$

b. Existen matrices cuadradas Ay B del mismo orden talque : $AB + I = BA$

c. Sea $A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$ y B invertible entonces: $tr(BAB^{-1}) = tr(A)$

d. Todo sistema homogéneo es compatible

5. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) si A es invertible entonces: $((A)^{-1})^{-1} = A$

Solución: sí, la afirmación es verdadera. La inversa de una matriz es igual a la matriz original. Esta deriva directamente de la definición de la inversa de una matriz. Si "A" es una matriz inversible, entonces su inversa, denotado por A^{-1}, esta definida como la matriz tal que $A \times A^{-1} = I$, donde "I" es la matriz identidad.

Entonces, si tomamos la inversa de la inversa de A, denotado por $(A^{-1})^{-1}$, est significa que estamos buscando una matriz tal que $A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = I$. Pero ya q A^{-1} es la inversa de A, $(A^{-1})^{-1}$ es simplemente A, ya que la matriz "A" es su propia inversa en este contexto. Por lo tanto, $(A^{-1})^{-1} = A$.

5.c = Sea $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y B invertible : $Tr(B.A.B^{-1}) = Tr(A)$.

Solución: sí, la afirmación es verdadera. Para demostrar podemos utilizar las propiedades del rango de una matriz y del producto de matrices. Dado que "B" es invertible, podemos multiplicar ambos lados de la ecuación B^{-1} sin cambiar su valor. Entonces tenemos:

$Tr(B.AB^{-1}) = Tr(A)$; ahora, utilizaremos una propiedad del rango de una matriz: $Tr(XY) = Tr(YX)$. Para cualesquiera de las matrices X e Y.

Por lo tanto: $Tr(B^{-1}.BA) = Tr(AB)$. Dado que $B^{-1}B$ es igual a la matriz de identidad del mismo matriz identidad I, donde I es la matriz de identidad del mismo tamaño que B, entonces:

* $Tr(IA) = Tr(AB)$

** $Tr(A) = Tr(AB)$

; Por lo tanto, $Tr(BAB^{-1}) = Tr(A)$. Esto demuestra que la afirmación Verdadera.

5.d. Todo sistema homogéneo es compatible

sí, todo sistema homogéneo es compatible un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo si todas sus ecuaciones tienen el término constante igual a cero. Por ejemplo, un sistema homogéneo de "m" ecuaciones y "n" incognitas pueden representarse como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

La solución trivial para cualquier sistema homogéneo es cuando todas las incognitas son iguales a cero. $(x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0)$. Esta solución siempre existe y satisface todas las ecuaciones del sistema, por lo tanto, el sistema es compatible. Además, si un sistema homogéneo tiene al menos una solución no trivial (Es decir, una solución donde al menos una de las incognitas no es cero), entonces también tiene infinitas soluciones, ya que pueden escalar las soluciones no triviales.